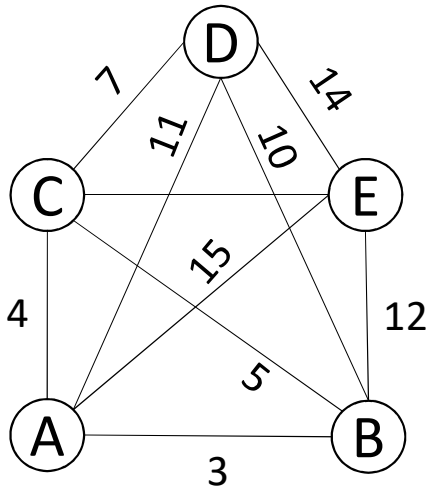


# Branch-and-Bound

Traveling Salesperson Problem  
Example



	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>
<b>A</b>	$\infty$	3	4	11	15
<b>B</b>	3	$\infty$	5	10	12
<b>C</b>	4	5	$\infty$	7	14
<b>D</b>	11	10	7	$\infty$	13
<b>E</b>	15	12	14	13	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	3	4	11	15
B	3	$\infty$	5	10	12
C	4	5	$\infty$	7	14
D	11	10	7	$\infty$	13
E	15	12	14	13	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	3	4	11	15
B	3	$\infty$	5	10	12
C	4	5	$\infty$	7	14
D	11	10	7	$\infty$	13
E	15	12	14	13	$\infty$

	A	B	C	D	E	
A	$\infty$	0	1	8	12	<b>3</b>
B	0	$\infty$	2	7	9	<b>3</b>
C	0	1	$\infty$	3	10	<b>4</b>
D	4	3	0	$\infty$	6	<b>7</b>
E	3	0	2	1	$\infty$	<b>12</b>

row reduction cost = 29

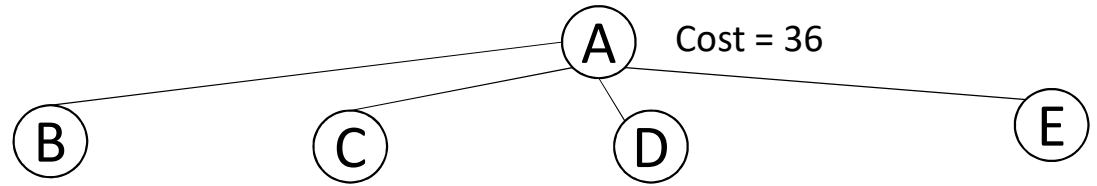
Total cost = 29 + 7 = 36

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	0	1	7	6
B	0	$\infty$	2	6	3
C	0	1	$\infty$	2	4
D	4	3	0	$\infty$	0
E	3	0	2	0	$\infty$

**0 0 0 1 6**

column reduction cost = 7

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	0	1	7	6
B	0	$\infty$	2	6	3
C	0	1	$\infty$	2	4
D	4	3	0	$\infty$	0
E	3	0	2	0	$\infty$



	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	2	6	3
C	0	$\infty$	$\infty$	2	4
D	4	$\infty$	0	$\infty$	0
E	3	$\infty$	2	0	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	0	4	1
C	0	$\infty$	$\infty$	2	4
D	4	$\infty$	0	$\infty$	0
E	3	$\infty$	2	0	$\infty$

row reduction cost = 2

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	0	4	1
C	0	$\infty$	$\infty$	2	4
D	4	$\infty$	0	$\infty$	0
E	3	$\infty$	2	0	$\infty$

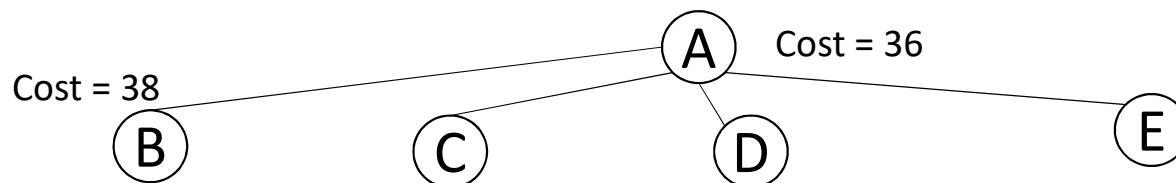
0 0 0 0

No column reduction

new reduction cost = 2 + 0 = 2

$$\begin{aligned} \text{Total cost} &= \text{Cost}(AB) + \text{new reduction} + \text{Cost}(A) \\ &= 0 + 2 + 36 = 38 \end{aligned}$$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	0	1	7	6
B	0	$\infty$	2	6	3
C	0	1	$\infty$	2	4
D	4	3	0	$\infty$	0
E	3	0	2	0	$\infty$



	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	0	$\infty$	$\infty$	6	3
C	$\infty$	1	$\infty$	2	4
D	4	3	$\infty$	$\infty$	0
E	3	0	$\infty$	0	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	0	$\infty$	$\infty$	6	3
C	$\infty$	0	$\infty$	1	3
D	4	3	$\infty$	$\infty$	0
E	3	0	$\infty$	0	$\infty$

row reduction cost = 1

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	0	$\infty$	$\infty$	6	3
C	$\infty$	0	$\infty$	1	3
D	4	3	$\infty$	$\infty$	0
E	3	0	$\infty$	0	$\infty$

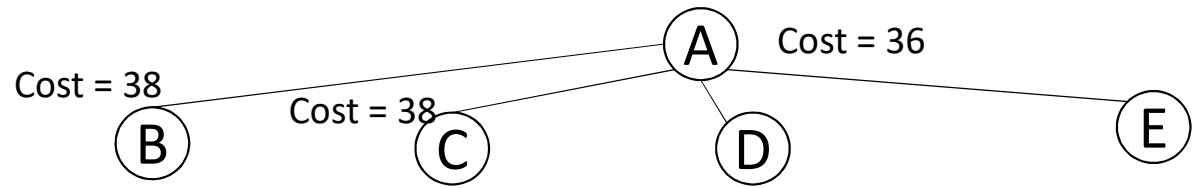
0 0 0 0

No column reduction

new reduction cost = 1

$$\begin{aligned} \text{Cost} &= \text{Cost}(AC) + \text{new reduction} + \text{Cost}(A) \\ &= 1 + 1 + 36 = 38 \end{aligned}$$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	0	1	7	6
B	0	$\infty$	2	6	3
C	0	1	$\infty$	2	4
D	4	3	0	$\infty$	0
E	3	0	2	0	$\infty$



	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	0	$\infty$	2	$\infty$	3
C	0	1	$\infty$	$\infty$	4
D	$\infty$	3	0	$\infty$	0
E	3	0	2	$\infty$	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	0	$\infty$	2	$\infty$	3
C	0	1	$\infty$	$\infty$	4
D	$\infty$	3	0	$\infty$	0
E	3	0	2	$\infty$	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	0	$\infty$	2	$\infty$	3
C	0	1	$\infty$	$\infty$	4
D	$\infty$	3	0	$\infty$	0
E	3	0	2	$\infty$	$\infty$

No row reduction

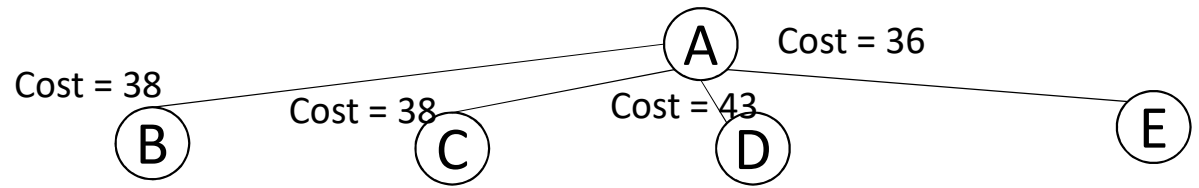
0 0 0 0

No column reduction

new reduction cost = 0

$$\begin{aligned} \text{Cost} &= \text{Cost}(AD) + \text{new reduction} + \text{Cost}(A) \\ &= 7 + 0 + 36 = 43 \end{aligned}$$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	0	1	7	6
B	0	$\infty$	2	6	3
C	0	1	$\infty$	2	4
D	4	3	0	$\infty$	0
E	3	0	2	0	$\infty$



	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	0	$\infty$	2	6	$\infty$
C	0	1	$\infty$	2	$\infty$
D	4	3	0	$\infty$	$\infty$
E	$\infty$	0	2	0	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	0	$\infty$	2	6	$\infty$
C	0	1	$\infty$	2	$\infty$
D	4	3	0	$\infty$	$\infty$
E	$\infty$	0	2	0	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	0	$\infty$	2	6	$\infty$
C	0	1	$\infty$	2	$\infty$
D	4	3	0	$\infty$	$\infty$
E	$\infty$	0	2	0	$\infty$

No row reduction

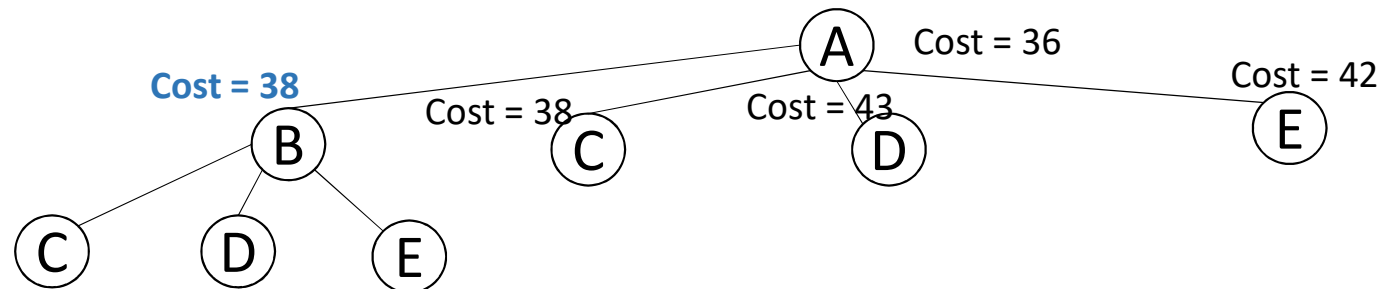
0 0 0 0

No column reduction

new reduction cost = 0

$$\begin{aligned} \text{Cost} &= \text{Cost}(AE) + \text{new reduction} + \text{Cost}(A) \\ &= 6 + 0 + 36 = 42 \end{aligned}$$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	0	4	1
C	0	$\infty$	$\infty$	2	4
D	4	$\infty$	0	$\infty$	0
E	3	$\infty$	2	0	$\infty$



	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
C	0	$\infty$	$\infty$	2	4
D	4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
E	3	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
C	0	$\infty$	$\infty$	2	4
D	4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
E	3	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
C	0	$\infty$	$\infty$	2	4
D	4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
E	3	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$

No Row reduction

0

0

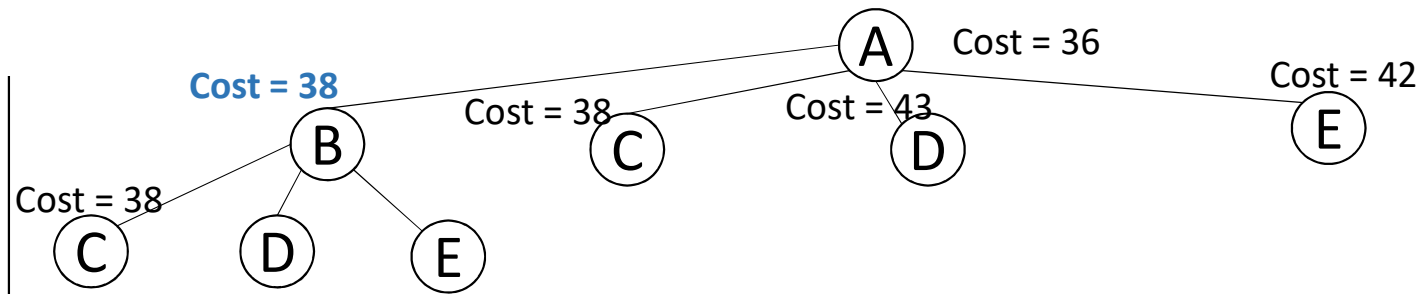
0

No column reduction

new reduction cost = 0

$$\begin{aligned} \text{Cost} &= \text{Cost}(BC) + \text{new reduction} + \text{Cost}(B) \\ &= 0 + 0 + 38 = 38 \end{aligned}$$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	0	4	1
C	0	$\infty$	$\infty$	2	4
D	4	$\infty$	0	$\infty$	0
E	3	$\infty$	2	0	$\infty$



	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
C	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4
D	4	$\infty$	0	$\infty$	0
E	3	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
C	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4
D	4	$\infty$	0	$\infty$	0
E	1	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
C	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4
D	4	$\infty$	0	$\infty$	0
E	1	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$

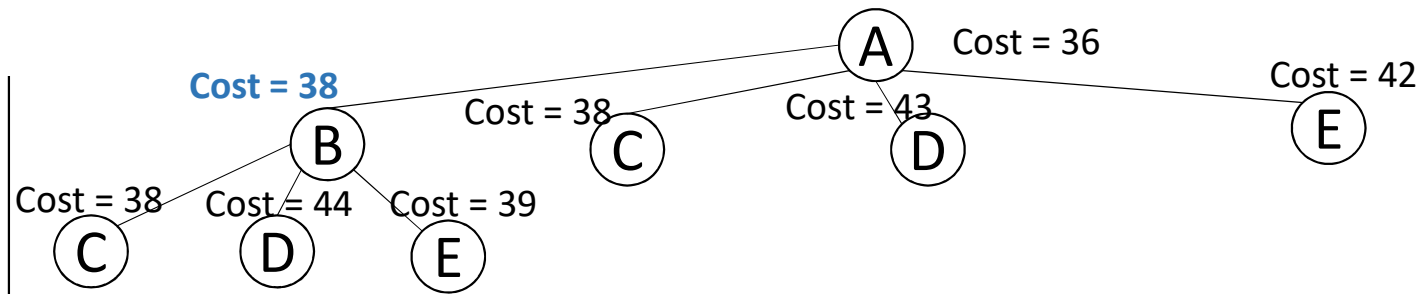
Row reduction cost = 2

No column reduction

new reduction cost = 2

$$\begin{aligned} \text{Cost} &= \text{Cost}(BD) + \text{new reduction} + \text{Cost}(B) \\ &= 4 + 2 + 38 = 44 \end{aligned}$$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	0	4	1
C	0	$\infty$	$\infty$	2	4
D	4	$\infty$	0	$\infty$	0
E	3	$\infty$	2	0	$\infty$



	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
C	0	$\infty$	$\infty$	2	$\infty$
D	4	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$
E	3	$\infty$	2	0	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
C	0	$\infty$	$\infty$	2	$\infty$
D	4	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$
E	3	$\infty$	2	0	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
C	0	$\infty$	$\infty$	2	$\infty$
D	4	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$
E	3	$\infty$	2	0	$\infty$

No row reduction

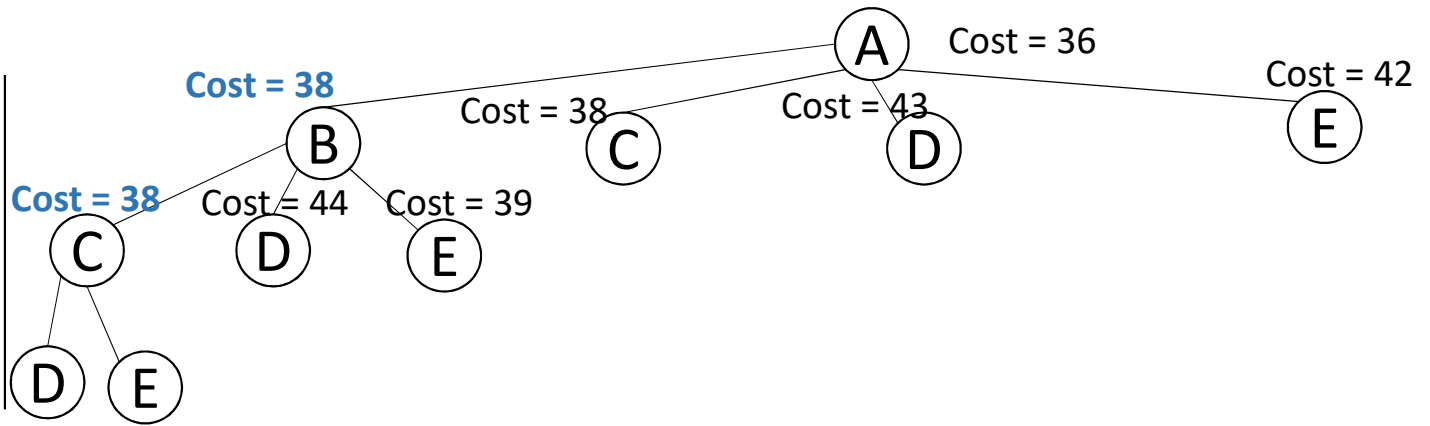
0 0 0

No column reduction

new reduction cost = 0

$$\begin{aligned} \text{Cost} &= \text{Cost}(BE) + \text{new reduction} + \text{Cost}(B) \\ &= 1 + 0 + 38 = 39 \end{aligned}$$

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	0	∞	∞	2	4
D	4	∞	∞	∞	0
E	3	∞	∞	0	∞



	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	∞	∞	∞	∞	∞
D	4	∞	∞	∞	0
E	3	∞	∞	∞	∞

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	∞	∞	∞	∞	∞
D	4	∞	∞	∞	0
E	0	∞	∞	∞	∞

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	∞	∞	∞	∞	∞
D	4	∞	∞	∞	0
E	0	∞	∞	∞	∞

Row reduction Cost = 3

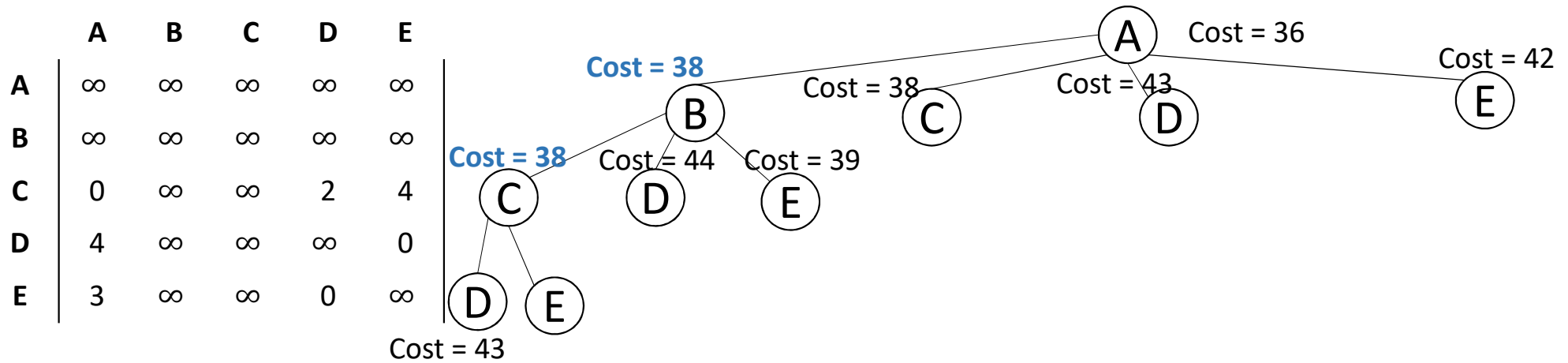
0

0

No column reduction

new reduction cost = 3

$$\begin{aligned} \text{Cost} &= \text{Cost}(CD) + \text{new reduction} + \text{Cost}(C) \\ &= 2 + 3 + 38 = 43 \end{aligned}$$



	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	∞	∞	∞	∞	∞
D	4	∞	∞	∞	∞
E	3	∞	∞	0	∞

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	∞	∞	∞	∞	∞
D	0	∞	∞	∞	∞
E	3	∞	∞	0	∞

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	∞	∞	∞	∞	∞
D	0	∞	∞	∞	∞
E	3	∞	∞	0	∞

Row reduction Cost = 4

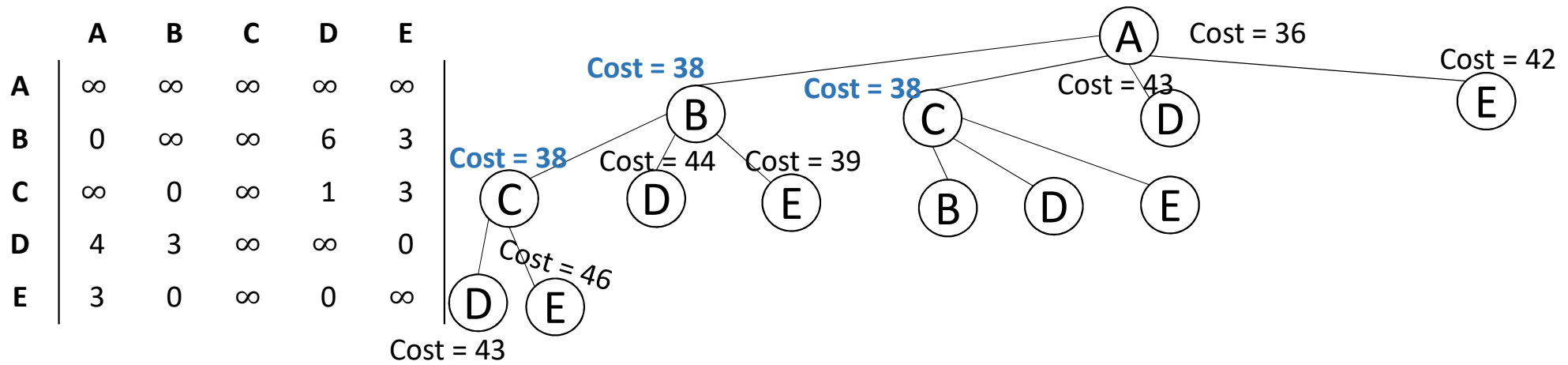
0

0

No column reduction

new reduction cost = 4

$$\begin{aligned} \text{Cost} &= \text{Cost}(CE) + \text{new reduction} + \text{Cost}(C) \\ &= 4 + 4 + 38 = 46 \end{aligned}$$



	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	0	$\infty$	$\infty$	6	3
C	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
D	4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
E	3	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	0	$\infty$	$\infty$	6	3
C	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
D	4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
E	3	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$

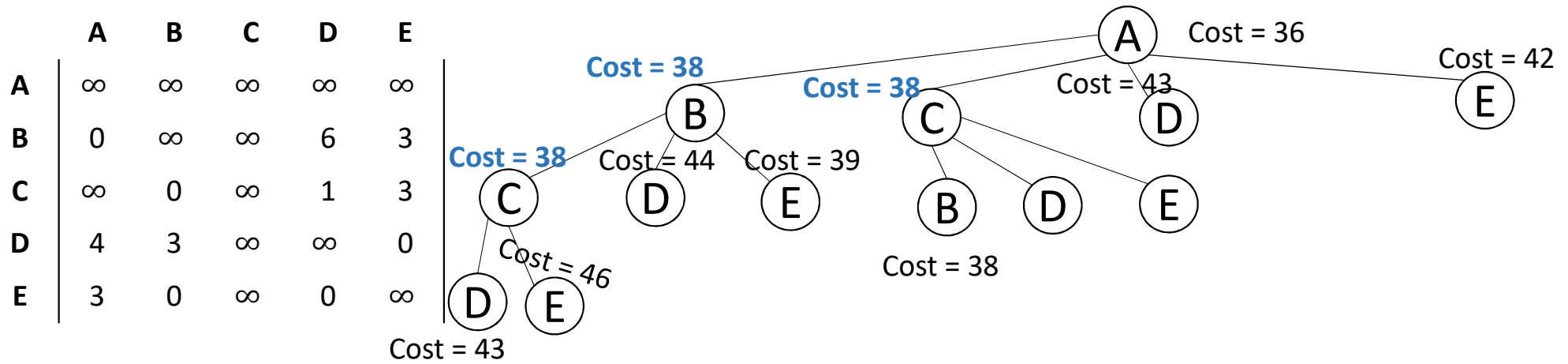
	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	0	$\infty$	$\infty$	6	3
C	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
D	4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
E	3	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$

no row reduction

No column reduction

new reduction cost = 0

$$\text{Cost} = \text{Cost}(CB) + \text{new reduction} + \text{Cost}(C) = 0 + 0 + 38 = 38$$



	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	0	∞	∞	6	3
C	∞	0	∞	1	3
D	4	3	∞	∞	0
E	3	0	∞	0	∞

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	0	∞	∞	6	3
C	∞	∞	∞	∞	∞
D	0	∞	∞	∞	0
E	3	∞	∞	0	∞

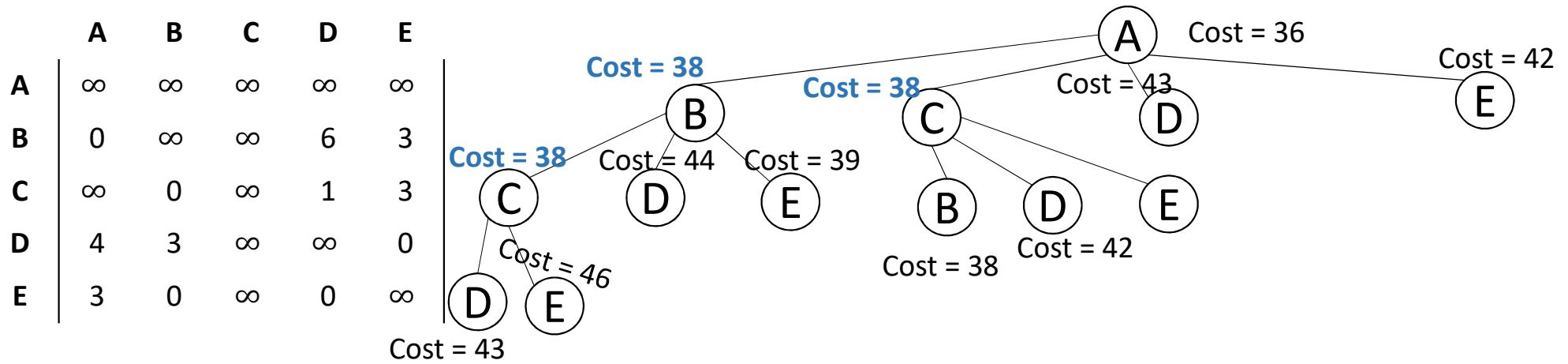
	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	0	∞	∞	6	3
C	∞	∞	∞	∞	∞
D	0	∞	∞	∞	0
E	3	∞	∞	0	∞

Row reduction Cost = 4

new reduction cost = 4

$$\text{Cost} = \text{Cost}(\text{CD}) + \text{new reduction} + \text{Cost}(\text{C}) = 0 + 4 + 38 = 42$$

No column reduction



	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	0	$\infty$	$\infty$	6	$\infty$
C	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
D	4	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$
E	3	0	$\infty$	0	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	0	$\infty$	$\infty$	6	$\infty$
C	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
D	1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$
E	3	0	$\infty$	0	$\infty$

<b>0</b>
<b>3</b>
<b>0</b>

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	0	$\infty$	$\infty$	6	$\infty$
C	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
D	1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$
E	3	0	$\infty$	0	$\infty$

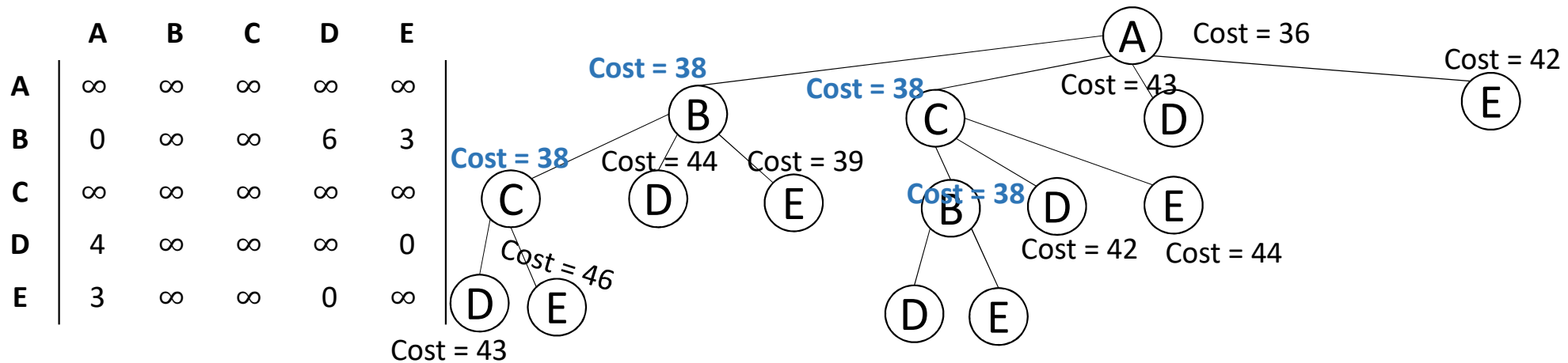
Row reduction Cost = 3

0 0 0

No column reduction

new reduction cost = 3

Cost = Cost(CE) + new reduction + Cost(C) = 3 + 3 + 38 = 44



	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
C	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
D	4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
E	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
C	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
D	4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
E	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
C	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
D	4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
E	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

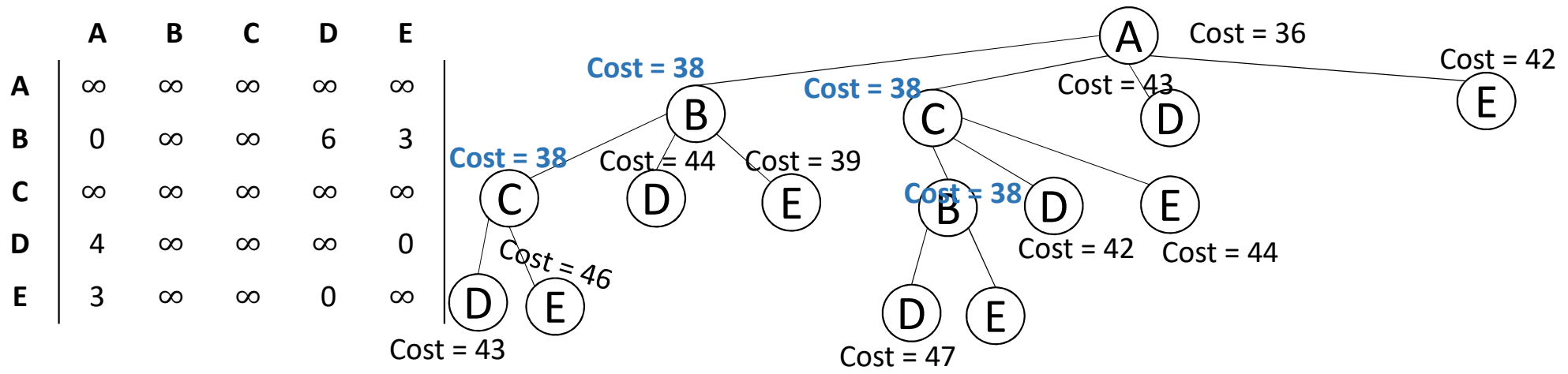
Row reduction Cost = 3

0 0

No column reduction

new reduction cost = 3

$$\text{Cost} = \text{Cost}(\text{BD}) + \text{new reduction} + \text{Cost}(\text{B}) = 6 + 3 + 38 = 47$$



	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
C	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
D	4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
E	3	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$

	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
C	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
D	4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
E	3	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$

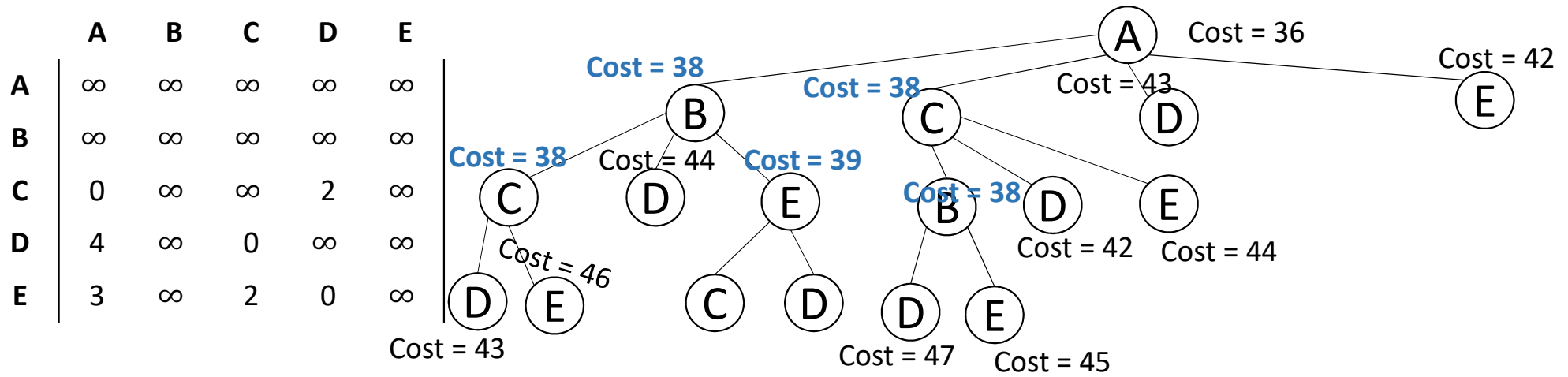
	A	B	C	D	E
A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
C	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
D	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
E	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

Row reduction Cost = 4

0  
No column reduction  
0

new reduction cost = 4

$$\text{Cost} = \text{Cost}(\text{BE}) + \text{new reduction} + \text{Cost}(\text{B}) = 3 + 4 + 38 = 45$$



	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	0	∞	∞	2	∞
D	4	∞	∞	∞	∞
E	∞	∞	∞	∞	∞

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	0	∞	∞	2	∞
D	0	∞	∞	∞	∞
E	∞	∞	∞	∞	∞

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	0	∞	∞	0	∞
D	0	∞	∞	∞	∞
E	∞	∞	∞	∞	∞

Row reduction Cost = 4

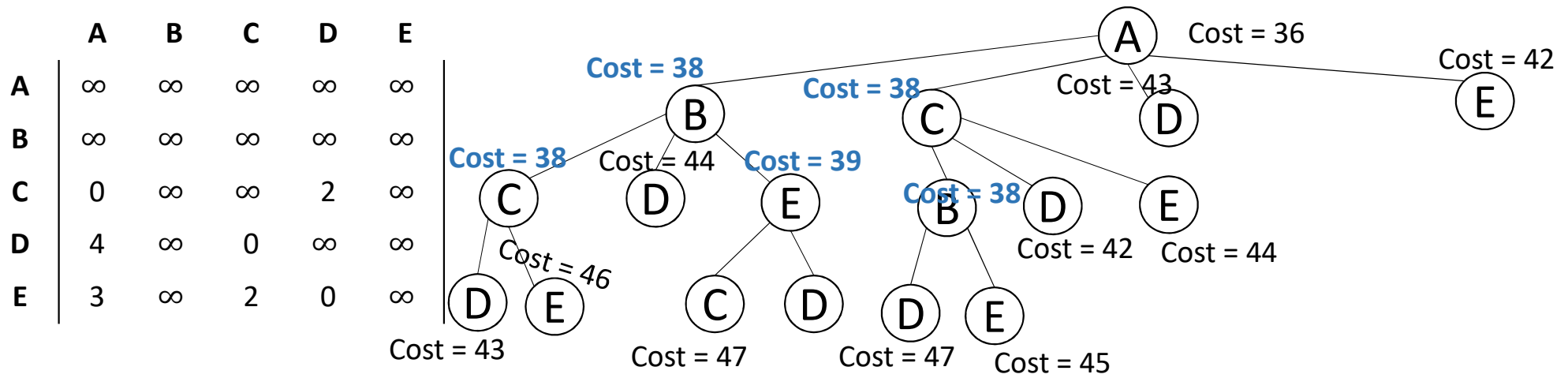
0

2

column reduction cost = 2

new reduction cost = 6

Cost = Cost(EC) + new reduction + Cost(E) = 2 + 6 + 39 = 47



	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	0	∞	∞	∞	∞
D	4	∞	0	∞	∞
E	∞	∞	∞	∞	∞

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	0	∞	∞	∞	∞
D	4	∞	0	∞	∞
E	∞	∞	∞	∞	∞

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	0	∞	∞	∞	∞
D	4	∞	0	∞	∞
E	∞	∞	∞	∞	∞

No Row reduction

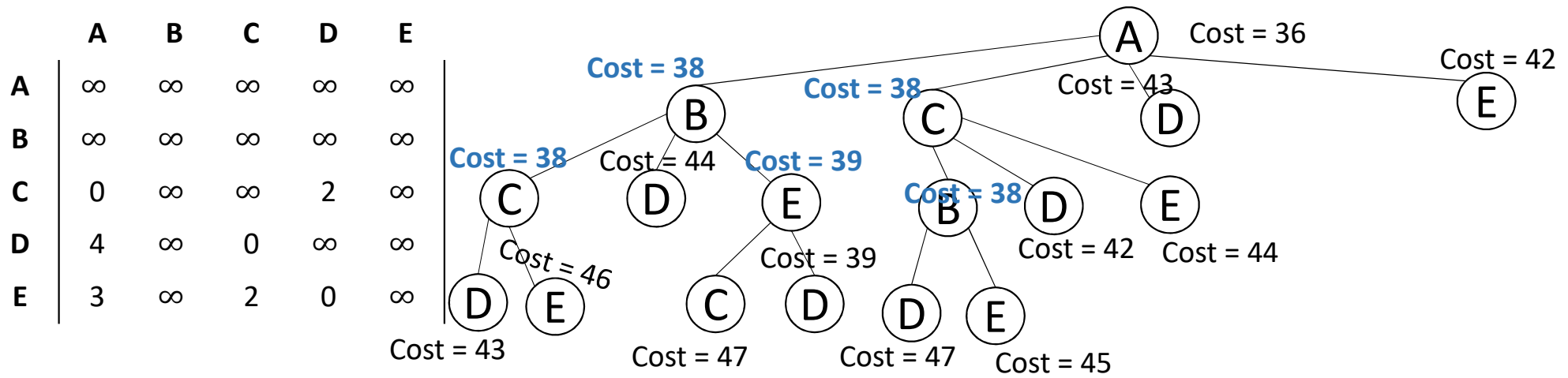
0

0

No column reduction

new reduction cost = 0

Cost = Cost(ED) + new reduction + Cost(E) = 0 + 0 + 39 = 39



	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	0	∞	∞	∞	∞
D	4	∞	0	∞	∞
E	∞	∞	∞	∞	∞

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	0	∞	∞	∞	∞
D	4	∞	0	∞	∞
E	∞	∞	∞	∞	∞

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	0	∞	∞	∞	∞
D	4	∞	0	∞	∞
E	∞	∞	∞	∞	∞

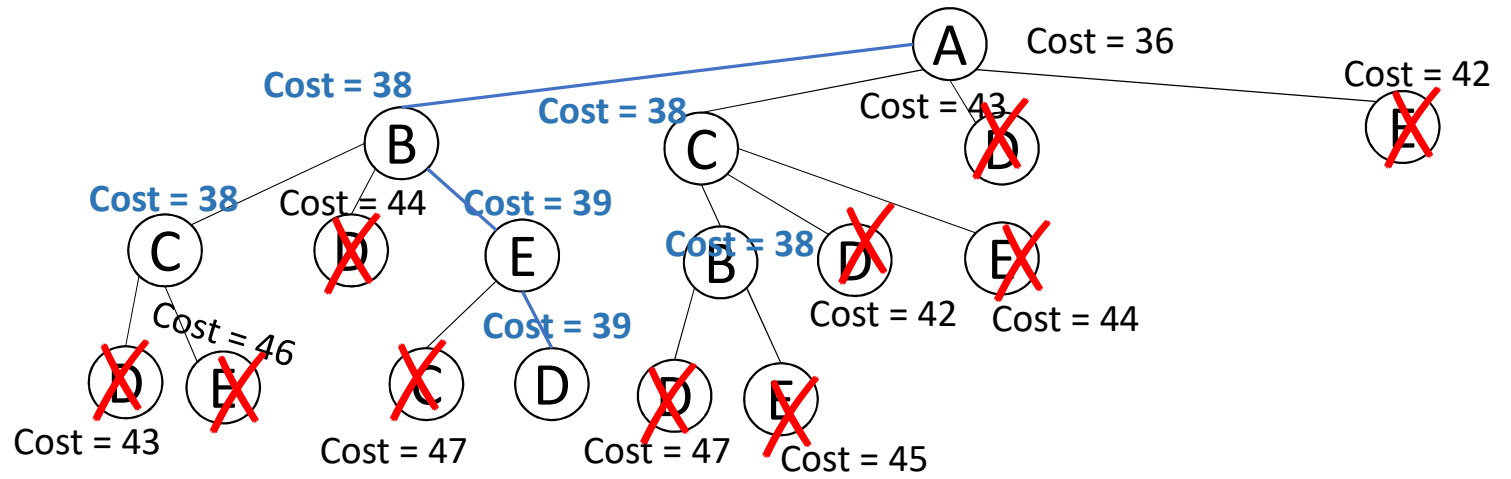
No Row reduction

0 0  
No column reduction

new reduction cost = 0

$$\text{Cost} = \text{Cost}(ED) + \text{new reduction} + \text{Cost}(E) = 0 + 0 + 39 = 39$$

Upper Bound = 39



Tour =  $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A$ ,  
Min Length = 39